

## 最適補助林分選定モデルの概要

本資料では Moriguchi et al. (2017)の最適補助林分選定モデルを概説する。主な方針は次の3つである。

- ①補助は造林事業に対して行う。
- ②年補助総額を最小限とするため、収益性の高い林分から補助対象としていく。
- ③各林分の造林補助は可能な限り最小となるよう、補助率を調整する。

①の方針を採るのは、造林費用に最も大きな現価係数がかかるためである(守口ら 2016)。同じ金額の補助でも、できるだけ早い林齢で行われる作業の費用を補助する方が効率的になる。造林作業は林齢0年に行われるものとして扱う。ただし、育林費用における補助率と造林費用における補助率が同一ならば、作業実施林齢を用いて現価係数を考慮することで、造林費用の一部として育林費用を扱うことができる。

②は、相対的に収益性の高い林分を補助対象として木材生産林と位置づけていることを意味する。例えば山本ら(2017)や Battuvshin et al. (2020)が一律の補助率を全林分に適用し、そのうち土地期望価が正となる林分を木材生産林として木材供給ポテンシャルを推計したことと同等の意味を持つ。

③の方針は、補助対象が最適な経営を行うよう促すとともに、ある補助対象林分は補助金そのものを資金源とした大きな利益を発生させ、他の補助対象林分では全く利益は出ないか赤字、という偏りを防止することである。なお、ここで言う利益は、土地期望価で評価される。すなわち、補助対象林分では、造林補助の投入下で土地期望価の最適伐期齢を選択したとき、土地期望価が0となるよう、補助率と伐期齢を同時に決定する。なお、林分毎に地利条件・地位条件が異なるために、林分毎に異なる補助率となる。

その他、本モデルは法正状態を仮定し、主伐収穫のみを考慮する。この枠組において、地域における最大補助率を決めることは、補助対象林分を決めることと等しい。同時に、各林

分への補助率や伐期齢が決まるため、年供給量、年更新面積、および年補助総額が決まることになる。

### 造林補助率の算定方法

造林補助率  $s$  (値域は $[0, 1]$ )のもとで伐期齢  $t$  (年)を選択したときの土地期望価(SEV, 円/ha)は次のように表せる。

$$SEV(t, s) = \frac{I(t) \exp(-rt) - C(1 - s)}{1 - \exp(-rt)} \quad (1)$$

ここで  $I(t)$ は伐期齢  $t$  のときの面積あたり主伐利益(円/ha)、 $r$  は連続化された林業年利(赤尾1991; 年利  $R\%$ として  $\ln(1+0.01R)$ )、 $C$  は造林費用(円/ha)である。所与の林分において、もし土地期望価が造林補助なしで非負となる  $t$  があれば、造林補助は行われない。造林補助なしではどんな  $t$  を選択しても土地期望価が負となる林分が、造林補助対象となりうる。

ところで、中央銀行を中心として名目金利を 0 未満にするマイナス金利政策が採用されることがあるが、林業では投資(造林)から回収(主伐)まで長期を要し、投資の回収に失敗するリスクもあるので、林業金利がマイナスとなることは考えられない。したがって、 $t$  と  $r$  は 0 より大きいため、 $\exp(-rt)$ の値域は $(0, 1)$ であり、(1)式の分母は常に正である。結果的に、土地期望価の正負は(1)式の分子の正負によって決まる。 $t$ を変化させて(1)式の分子を最大化させるとき、その解となる  $t$  は  $s$  の値に無関係である。したがって、(1)式右辺の分子第 1 項を最大化させる伐期齢( $t^*$ )を求め、そのうえで、(2)式を満たす  $s$  を求めれば、土地期望価を非負としうる最小の補助率( $s^*$ )が求まり、(3)式のように与えられる。

$$0 = \frac{I(t^*) \exp(-rt^*) - C(1 - s)}{1 - \exp(-rt^*)} \quad (2)$$

$$\therefore s^* = 1 - I(t^*) \exp(-rt^*) / C \quad (3)$$

この  $s^*$ のもとでは、土地期望価が非負となるのは伐期齢が  $t^*$ のときだけである。すなわち、他の伐期齢では土地期望価は負となるので、 $t^*$ は土地期望価基準の最適伐期齢でもある。なお、土地期望価基準の最適伐期齢と(1)式右辺の分子第 1 項を最大化する伐期齢は、通常一

致しない(赤尾 1991)。両者が一致するのは、(3)式により決定した補助率( $s^*$ )を用いる場合に限る。なお、以下では断りのない限り、補助率とは  $s^*$  のことを指す。

$I(t)$ が(4)式の Richards 成長関数、もしくは(5)式の Gompertz 成長関数に従うとき、 $t^*$ および(3)式右辺第2項の分子は、それぞれ(6)、(7)式のように表せる(守口ら 2016)。

$$I(t) = I_{\infty}\{1 - L \cdot \exp(-kt)\}^m \quad (4)$$

$$I(t) = I_{\infty}L^{\exp(-kt)} \quad (5)$$

$$t^* = \frac{1}{k} \ln \left[ \frac{L(r + km)}{r} \right], \quad I(t^*) \exp(-rt^*) = I_{\infty}\rho, \quad \rho = \left[ \frac{L}{r}(r + km) \right]^{-\frac{r}{k}} \left( \frac{km}{r + km} \right)^m \quad (6)$$

$$t^* = \frac{1}{k} \ln \left( \frac{-k \ln L}{r} \right), \quad I(t^*) \exp(-rt^*) = I_{\infty}\rho, \quad \rho = \left( -\frac{r}{k \ln L} \right)^{r/k} \quad (7)$$

ここで  $I_{\infty}$ は主伐利益の漸近値(円/ha;  $I(t)$ において  $t \rightarrow \infty$ としたときの値)、 $L$ 、 $k$ 、 $m$ は成長関数の形状を決めるパラメータである。(6)、(7)式より、 $t^*$ は  $I_{\infty}$ と無関係である。すなわち、地位条件の差異により  $I_{\infty}$ が異なっても、最適伐期齢は共通である。そのため本モデルでは、地位条件のみが異なる林分を集めて、「計画作業級」(primitive working class)を構成する。

$I(t)$ が Richards 成長関数や Gompertz 成長関数に近似されうる根拠は次の通りである。まず、主伐利益  $I(t)$ (円/ha)は収穫材積( $Y(t)$ ;  $\text{m}^3/\text{ha}$ )に材積あたり平均利益( $q$ ; 円/ $\text{m}^3$ )をかければ求まる。 $q$ は平均単価から収穫・輸送費用を差し引くことで計算される。簡単のため、1つの計画作業級では  $q$ は一定と仮定する。また、収穫材積は林分材積( $V(t)$ ;  $\text{m}^3/\text{ha}$ )に収穫歩留まり  $y_r$ (値域は[0, 1])をかけて求まる。すなわち

$$I(t) = qY(t) = qy_rV(t) \quad (8)$$

と表せる。

次に、 $V(t)$ は主伐収穫時の林分材積であり、ある程度一定の収量比数に仕立てられるであろう。収量比数  $R_y$ のときの林分材積は、その定義より、同じ成長段階における最多密度状態の林分材積を  $V_{Rf}$ として、 $R_yV_{Rf}$ で与えられる。林分密度管理図(安藤 1968)では(9)式で表される  $V_{Rf}$ と平均樹高( $H$ ;  $\text{m}$ )の関係が含意されているので、(8)式を整理すると  $I(t)$ は(10)式で

与えられる。

$$V_{Rf} = aH^b \quad (9)$$

$$I(t) = a'H(t)^b, \quad a' = qy_r R_y a \quad (10)$$

ここで  $H(t)$  は平均樹高の成長曲線であり、Richards 成長関数や Gompertz 成長関数でよく表現できることが知られている。両成長関数は冪乗変換に対してその形を保存するので(箕輪 1982; 大隅・石川 1983)、 $I(t)$  もこれらの関数で近似される。

最適伐期齢における収穫材積( $Y^*$ )は(6)–(8)式より次のように求まる。

$$Y^* = Y(t^*) = I_\infty \rho / q' \quad (11)$$

なお  $q' = q \cdot \exp(-rt^*)$  とおいた。造林補助なしでも最適伐期齢を採用すれば土地期望価が非負となるような  $Y^*$  の下限値、言い換えれば補助対象となる  $Y^*$  の上限値( $Y_U^*$ )は、(3)式に  $s=0$  を代入したうえで、(8)、(11)式を用いて  $Y^*$  について解くと求まり、

$$Y_U^* = C / q' \quad (12)$$

となる。 $Y^* < Y_U^*$  の林分に造林補助を行うとき、(3)、(11)、(12)式より、最小補助率は次のように計算できる。

$$s^* = 1 - q'Y^*/C = 1 - Y^*/Y_U^* \quad (13)$$

ところで(10)式の  $t \rightarrow \infty$  のときを考えると、 $I_\infty$  と平均樹高の漸近値( $H_\infty$ )との間にも  $I_\infty = a'H_\infty^b$  の関係がある。また、地位指数は基準年(40 年が多い)のときの平均樹高を指すが、 $H_\infty$  は基準年を $\infty$ (年)としたときの地位指数と同義である。日本では地位級もよく用いられるが、これは地域における相対的な地位の良否を表すので、調製資料における地位級の頻度が地域における面積頻度を表すように、データが収集される。その調製資料を用いて各林分の  $H_\infty$  を算出してヒストグラムを作ると、概ね単純な一山型分布を描く。そこで、 $H_\infty$  の面積頻度は一般化ガンマ分布(Stacy 1962)に従うと仮定する。一般化ガンマ分布は確率変数の冪乗変換に対してその形を保存する性質を持つ(Dadpay et al. 2007; Khodabin and Ahmadabadi 2010)。これにより、 $I_\infty$  の面積頻度は  $H_\infty$  の面積頻度から推定でき、さらに(11)式から  $Y^* =$

$(a'\rho/q')H_\infty^b$ という冪乗関係もあるので、 $Y^*$ の面積頻度も  $H_\infty$ の面積頻度から推定できる。ある計画作業級において  $Y_L^* \leq Y^* \leq Y_U^*$  の林分全てに造林補助を行う場合の年供給量( $Y^\sigma$ ;  $\text{m}^3/\text{年}$ )、年更新面積( $A^\sigma$ ;  $\text{ha}/\text{年}$ )、および年補助総額( $S^\sigma$ ; 円/年)は、それぞれ次のように求められる (Moriguchi et al. 2017)。

$$Y^\sigma = \int_{Y_L^*}^{Y_U^*} Y^* \frac{A(Y^*)}{t^*} dY^* = \frac{A'}{t^* \Gamma(\psi)} \lambda' [\gamma\{g, (Y_U^*/\lambda')^{\tau/b}\} - \gamma\{g, (Y_L^*/\lambda')^{\tau/b}\}] \quad (14)$$

$$A^\sigma = \int_{Y_L^*}^{Y_U^*} \frac{A(Y^*)}{t^*} \cdot dY^* = \frac{A'}{t^* \Gamma(\psi)} [\gamma\{\psi, (Y_U^*/\lambda')^{\tau/b}\} - \gamma\{\psi, (Y_L^*/\lambda')^{\tau/b}\}] \quad (15)$$

$$S^\sigma = \int_{Y_L^*}^{Y_U^*} \frac{C S^*}{t^*} A(Y^*) dY^* = C A^\sigma - q' Y^\sigma \quad (16)$$

ここで  $A(Y^*)$ は  $Y^*$ の面積頻度( $\text{ha} \cdot (\text{m}^3/\text{ha})^{-1}$ )、 $A'$  は計画作業級全体の面積( $\text{ha}$ )、 $\lambda$  は  $H_\infty$ の面積頻度を一般化ガンマ分布に近似したときの尺度母数、 $\tau$ 、 $\psi$  は 2 つの形状母数であり、 $\lambda' = (a'\rho/q')\lambda^b$ 、 $g = \psi + b/\tau$ 、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数、 $\gamma(\cdot)$ は下側不完全ガンマ関数である。計画作業級における最大の補助率(すなわち、補助対象下限林分への補助率)を  $s_L^*$  とするとき、補助対象下限林分の  $Y^*$ 、すなわち  $Y_L^*$  は  $(1 - s_L^*)Y_U^*$  と決まる。さらに、前述の  $Y^*$  と  $H_\infty$ の冪乗関係を用いれば、補助対象林分となる  $H_\infty$ の範囲が定まる。

以上の方法で、伐期齢の最適化と補助率の最小化を各林分で同時に行ったときの、1 つの計画作業級における最大補助率、年供給量、年更新面積、年補助総額および補助対象林分の地位条件の関係が与えられる。実際には、1 つの地域であっても樹種や地利条件が異なる林分が混在する。計画作業級は樹種や地利条件ごとに構成する必要があるので、多くの場合、複数の計画作業級が混在した状況を考える必要がある。この場合、地域全体の年供給量( $Y^\Sigma$ ;  $\text{m}^3/\text{年}$ )、年更新面積( $A^\Sigma$ ;  $\text{ha}/\text{年}$ )、および年造林補助総額( $S^\Sigma$ ; 円/年)は単に、 $Y^\Sigma = \sum_i Y_i^\sigma$ 、 $A^\Sigma = \sum_i A_i^\sigma$ 、 $S^\Sigma = \sum_i S_i^\sigma$  ( $i$  は各計画作業級を表す)として、それぞれ計算できる。

各樹種のパラメータのうち、 $I(t)$ や、 $H_\infty$ および  $Y^*$ の分布に関連するものは表-S1 に示した。

### 補助不要林分からの供給

以上の方法では造林補助対象林分のみを扱っており、造林補助なしでも土地期望価が非負となりうる林分からの供給は考慮していない。本来、補助を受けない林分の森林所有者は、最適伐期齢を取ることを他者から要求される合理性はない。しかし本報では、補助を受けない林分においても土地期望価基準の最適伐期齢が選択されるものと仮定した。これらの林分における土地期望価基準の最適伐期齢は解析的に求まらないので、二分探索で数値的に計算した。また、(14)-(16)式の積分も解析的には求まらないので、 $\Delta H_{\infty}=0.5\text{m}$  として、台形近似による数値積分によって求めた。

## 引用文献

- 赤尾健一 (1991) 長伐期低コスト林業の経済分析 (I) 実質賃金率の上昇に対する森林所有者の対応. 日林誌 73: 419-425
- 安藤貴 (1968) 同齢単純林の密度管理に関する生態学的研究. 林試研報 210: 1-153
- Battuvshin B, Matsuoka Y, Shirasawa H, Toyama K, Hayashi U, Aruga K (2020) Supply potential and annual availability of timber and forest biomass resources for energy considering inter-prefectural trade in Japan. Land Use Policy 97: 104780
- Dadpay A, Soofi ES, Soyer R (2007) Information measures for generalized gamma family. J Econ 138: 568-585
- 片倉正行・山内仁人・古川仁 (2005) ヒノキおよびカラマツ人工林の長伐期施業に関する研究 -長期育成循環施業に対応する森林管理技術の開発-. 長野県林総セ研報 19: 1-16
- Khodabin M, Ahmatabadi A (2010) Some properties of generalized gamma distribution. Math Sci 4: 9-28
- 箕輪光博 (1982) 林木の生長に関する理論的考察(I): log-MITSCHERLICH 式の理論. 日林誌 64: 461-467
- 守口海・植木達人・大塚大・斎藤仁志 (2016) 造林・育林費用の許容上限の簡易な計算方法. 日林誌 98: 31-38
- Moriguchi K, Ueki T, Saito M (2017) Determining subsidised forest stands to satisfy required annual wood yield with minimum governmental expense. Land Use Policy 67: 573-583
- 長野県林務部 (1983) 長野県民有林カラマツ・スギ表系・スギ裏系人工林林分材積表・人工林収穫予想表. 長野県林務部
- 長野県林務部 (1984) 長野県民有林ヒノキ・アカマツ人工林林分材積表・人工林収穫予想表. 長野県林務部
- 大隅眞一・石川善朗 (1983) 樹木の生長解析に対する Richards 生長関数の適用性について. 京都府立大学学術報告[農学] 35: 49-76

林野庁 (1999) 人工林林分密度管理図(復刻版). 林野庁

Stacy EW (1962) A generalization of the gamma distribution. *Ann Math Stat* 33: 1187-1192

山本嵩久・有賀一広・古澤毅・當山啓介・鈴木保志・白澤紘明 (2017) 栃木県における木質  
バイオマス発電のための長期的な未利用材利用可能量推計. *日林誌* 99: 266-271



## 表

表-S1. 各種パラメータの設定値.

事項	記号	スギ表	スギ裏	ヒノキ	アカマツ	カラマツ
$I(t)$ の成長曲線パラメータ† <sup>1</sup>	$L$	1.066	1.066	1.050	1.116	1.114
	$k$	0.0348	0.0348	0.0258	0.0357	0.0416
	$m$	1.373859	1.373859	1.080773	1.201192	1.274434
$H_{\infty}$ の分布パラメータ† <sup>1</sup>	$\psi$	3.6332	1.7574	1.6942	4.1132	1.5661
	$\tau$	3.1085	3.2519	4.3279	3.0945	5.6060
	$\lambda$	18.6625	22.1063	22.1595	14.8164	25.0532
冪乗式のパラメータ† <sup>2</sup>	$a$	10.740	10.740	22.856	11.807	8.213
	$b$	1.373859	1.373859	1.080773	1.201192	1.274434

†<sup>1</sup>: スギは長野県林務部(1983)、ヒノキ・カラマツは片倉ら(2005)、アカマツは長野県林務部(1984)をもとに Moriguchi et al. (2017)により算出。†<sup>2</sup>: 林野庁(1999)をもとに算出。